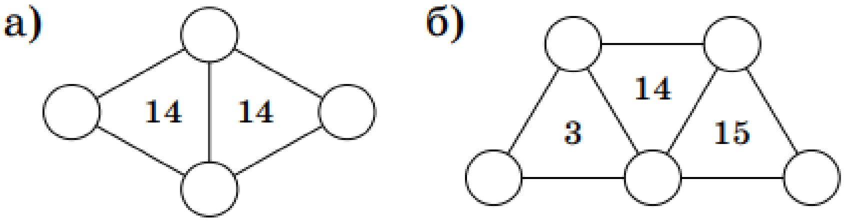
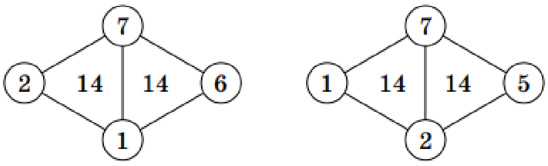
Задания для 5–6 классов

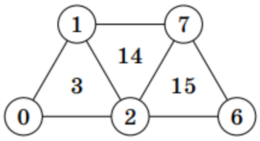
1. Кодовый замок. На рисунке изображены два кодовых замка. Замок откроется, если вписать в кружочки различные цифры так, чтобы число внутри каждого из треугольников совпало или с суммой, или с произведением цифр в его вершинах. Какая комбинация из а) четырёх б) пяти различных цифр откроет замок?



Решение. Для левого замка. В обоих треугольниках стоит число 14. Цифры в кружочках не должны повторяться, при этом две из трёх цифр у этих треугольников общие, поэтому в одном из треугольников 14 должно означать сумму, а в другом — произведение. 14 в виде произведения можно представить только как : $1 \cdot 2 \cdot 7$. Посмотрим, какие из этих цифр могут быть общими со вторым треугольником. Это не могут быть 1 и 2, так как никакая третья цифра не дотянет их сумму до 14. Значит, это либо 2 и 7, либо 1 и 7. В первом случае оставшееся число равно 14−(1+7)=6, во втором 14−(2+7)=5. На рисунке приведены два возможных набора цифр, открывающих левый замок. В каждом из примеров можно верхнее число поменять местами с нижним, а правое с левым.



Для правого замка. Число 3 не может быть получено как произведение трёх различных чисел, значит, оно получено как сумма 0+1+2. Тогда число 14 уже не может быть получено как сумма: две «общие» с числом 3 цифры в сумме дадут максимум 3, и ещё одной цифры, чтобы набрать 14, не хватит. Значит, 14 получено как произведение: $1 \cdot 2 \cdot 7$. Тогда число 15 получено с использованием 7 и 1 или 7 и 2 — в частности, получено как сумма. Вариант 7 и 1 невозможен: третьей цифрой должна быть 15−1−7=7, а она уже использована. Значит, 15 составлено как 2+7+6.



2. Тяжёлые фигуры. Маша не умеет писать некоторые буквы и всегда в них ошибается. В слове ТЕТРАЭДР она сделала бы пять ошибок, в слове ДОДЕКАЭДР — шесть, а в слове ИКОСАЭДР — семь. А сколько ошибок она сделает в слове ОКТАЭДР?

Решение. Если Маша с ошибкой пишет Д, то из букв О, Е, К, А, Э, Р, которые ещё входят в ДОДЕКАЭДР, она в трёх ошибается, а три пишет верно. Но все эти буквы, кроме Е, входят и в ИКОСАЭДР, то есть там она напишет верно как минимум две буквы и никак не сможет сделать 7 ошибок. Значит, букву Д Маша пишет правильно. Тогда она неминуемо пишет с ошибкой все остальные буквы слов ДОДЕКАЭДР и ИКОСАЭДР, а в слове ТЕТРАЭДР, таким образом, помимо Д, ещё верно пишет букву Т, но ошибается во всех остальных. Теперь ясно, что в слове ОКТАЭДР Маша сделает пять ошибок.

3. Счастье. Пятиклассник становится счастливым, когда съедает за день три разных фрукта. Какое наибольшее количество пятиклассников можно осчастливить, имея 20 яблок, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ.

Решение. Отложим пока мандарины в сторону. Осталось 20+30+40=90 фруктов. Поскольку каждый пятиклассник съедает не более одного мандарина, то каждый пятиклассник съест из этих 90 фруктов по крайней мере два. Значит, осчастливить можно не более чем 90:2=45. Покажем, как можно осчастливить 45 пятиклассников:

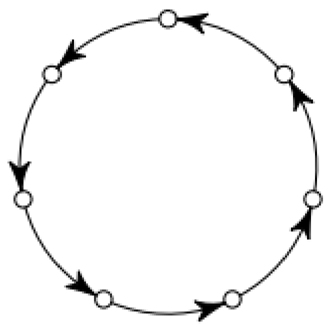
5 пятиклассников съедают: яблоко, банан, мандарин;

15 пятиклассников съедают: яблоко, персик, мандарин;

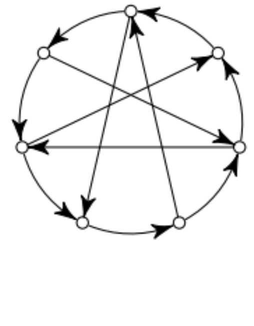
25 пятиклассников съедают: персик, банан, мандарин.

Всего 45 счастливых пятиклассников – и еще осталось пять неиспользованных мандаринов!

4. Авиаперелёты. Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рисунок). Назначьте (нарисуйте стрелочками) ещё несколько односторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было бы добраться, сделав не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше.



Ответ. Пример с пятью дополнительными рейсами см. на рисунке.

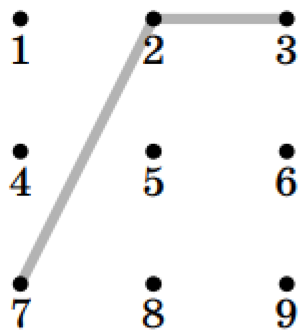


Задания для 7–9 классов

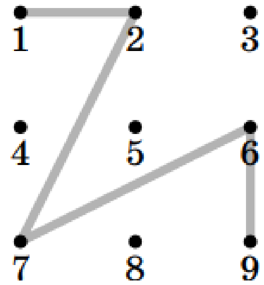
1. Твари. Александр хочет перевезти нелегально девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трёх чемоданах, по три твари в каждом. По правилам авиаперелётов, каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Александру распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался?

Решение. Тварей с весами 10, 9 и 8 кг необходимо поместить в разные чемоданы (иначе один чемодан будет слишком тяжёлым). Далее, чтобы никто не подрался, тварь весом 2 кг необходимо поместить во второй из этих чемоданов, а тогда тварь весом 4 кг – в первый. После этого нетрудно распределить и оставшихся тварей. В первый чемодан посадить тварей весом 10, 4, 3 кг; во второй – 9, 7, 2; в третий – 8, 6, 5.

2. Хитрый пароль. Ваня придумывает число из неповторяющихся цифр без нулей – пароль для своего телефона. Пароль работает так: если, не отрывая палец от экрана, последовательно соединить отрезками точки, соответствующие цифрам пароля, телефон разблокируется. При этом телефон не позволяет соединять отрезком две точки, между которыми есть третья: если Ваня соединит, например, 1 и 3, телефон «подумает», что Ваня вводит 1-2-3. Ваня хочет, чтобы при вводе пароля линия движения пальца не пересекала сама себя. А ещё чтобы перестановкой цифр пароля ни в каком порядке, кроме обратного, нельзя было получить другую такую линию. Например, пароль 1263 Ване не нравится, так как линия 6-3-2-1 другая, но тоже не имеет самопересечений. Ваня придумал пароль 723 (см. рис.). Эти три цифры – 2, 3 и 7 – действительно никакой другой линией соединить нельзя. Жаль только, что пароль такой короткий. Помогите Ване придумать пароль подлиннее. В ответе напишите сам пароль и нарисуйте ту единственную линию, которую можно получить из этих цифр.



Решение. Ответ. Например, 12769. См. рисунок. Этот пароль удовлетворяет Ваниным требованиям. Посмотрим, как можно соединить без самопересечений его цифры. Цифру 7 с какой-то цифрой соединить надо, это может быть либо 2, либо 6. Пусть, например, мы провели отрезок 7-6. Теперь 9 можно соединить только с 6. Далее неизбежно надо провести отрезки 7-2 и 2-1, и мы получаем линию, изображённую на рисунке. Если бы мы сначала вместо 7-6 провели 7-2, линия получилась бы та же самая.

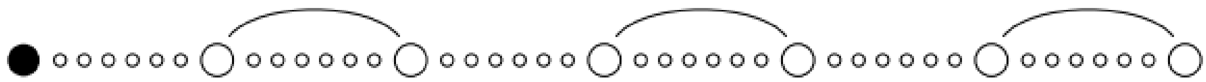


Таким образом, эта линия единственна. Пятизначных паролей возможно восемь: 12769, 96721, 14389, 98341, 32947, 74923, 78163, 36187. Впрочем, линии для всех восьми паролей одной и той же формы, а отличаются только поворотом, симметрией или направлением вычерчивания.

3. Монеты. В ряд лежат 100 монет, часть – вверх орлом, а остальные – вверх решкой. За одну операцию разрешается выбрать семь монет, лежащих через равные промежутки (т.е. семь монет, лежащих подряд, или семь монет, лежащих через одну, и т.д.), и все семь монет перевернуть. Докажите, что при помощи таких операций можно все монеты положить вверх орлом.

Решение. Ясно, что достаточно научиться переворачивать каждую из монет (сохраняя положение остальных). Покажем сначала, как перевернуть пару монет, между которыми лежит ровно 6 монет. Если мысленно объединить эту пару с монетами между ними, получится группа из 8 монет подряд. Перевернём в этой группе 7 левых монет, затем 7 правых. Тогда крайние монеты перевернутся по разу, а промежуточные дважды (т.е. вернутся в исходное положение).

Пусть теперь мы хотим перевернуть какую-то одну монету. Будем считать, что она лежит в левой половине (для правой половины рассуждения аналогичны). Посмотрим на семёрку монет, первая из которых – выбранная нами, следующая лежит через 6 монет, следующая ещё через 6 и т.д.



4. Палочки и треугольники. Имеется 111 палочек длин 1, 2, 3, …, 111. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Решение. Не обязательно. Условие означает, что среди любых трёх подряд лежащих палочек наименьшая будет больше разности двух других. Приведём конструкцию, для которой это выполняться не будет. Будем брать не 111 палочек, а любое их количество, кратное трём. При этом вместо палочек будем работать с набором чисел 1, 2, 3, …, $3k$. Сперва выложим круг из 2k чисел от k+1 до 3k: 2k, 2k+1, 2k-1, 2k+2, 2k-2, 2k+3, …, k+2, 3k-1, k+1, 3k. Разницы между соседями будут таковы: 1, 2, 3, …, 2k-2, 2k-1, k. Затем вставим числа 1, 2, …, k в промежутки с разностями 1, 3, 5, …, 2k-1 соответственно. При этом во все промежутки, кроме первого, вставляется число меньшее разности. Для первой тройки 2k, 2k+1, 1 неравенство треугольника также не выполняется.